

# 图象分形压缩映射存在性的构造性证明和应用

赵德平 朱伟勇

(东北大学计算中心, 沈阳 110006)

**摘要** 给出了图象分形压缩映射存在性的一个构造性证明, 并应用在图象编码中. 此外, 根据压缩映射存在性的构造证明过程, 提出了分形编码的一个新算法. 实验表明, 在提高图象恢复质量的同时, 运算时间也大大缩短.

**关键词** 分形 构造性证明 图象编码 压缩映射

中图法分类号: TN919.81 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2000)11-0932-06

## An Existent and Constructive Proof of Image Fractal Compression Mappings and Application in Fractal Image Coding

ZHAO De-ping, ZHU Wei-yong

(Computer Center of Northeastern University, Shenyang 110006)

**Abstract** This paper presents an existent and constructive proof of image fractal compression mappings and application in fractal image coding. In addition, based on the procedure of the existent and constructive proof of image fractal compression mappings, a new fractal image coding algorithm is presented. Some beneficial theory about these constructive fractal mappings are also discussed. The theoretical result shows that the theory is feasible. The experimental results prove that the new algorithm can improve reconstructing image while reducing encoding time.

**Keywords** Fractal, Constructive proof, Image coding, Compression map

## 0 引言

分形图象编码是80年代中后期提出的一种新型图象压缩编码方法<sup>[1-5]</sup>, 由于其具有高压缩比的潜力, 特别是Jacquin用其第一个实现了完全由计算机编码以来, 该方法近年来得到了迅速的发展<sup>[6-9]</sup>. 然而, 无论使用Jacquin方法或其以后的改进方法(如文献[6]、[9]提到的方法)实现图象编码都需要大量的计算, 因而在个人计算机上很难达到实用化程度.

针对Jacquin方法存在的缺点, 本文给出图象分形压缩映射存在性的一个构造性证明, 并把它应用在图象编码中, 使得图象压缩编码时间大大缩短, 并可以在个人机上实现图象分形编码.

## 1 分形压缩的理论基础

### 1.1 迭代函数系统

设 $D$ 是 $m$ 维欧氏空间 $R^m$ 上的闭子集, 称映射 $W: D \rightarrow D$ 是 $D$ 上的压缩映射, 如果对 $D$ 上的所有 $x, y$ 存在一个常数 $s$ , 满足 $0 < s < 1$ , 使得

$$|W(x) - W(y)| \leq s|x - y| \quad (1)$$

若式(1)取等式, 则称 $W$ 为相似映射.

若 $w_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 是压缩映射, 则称 $\{w_i | i = 1, 2, \dots, n, w_i: D \rightarrow D\}$ 是压缩映射集, 或称为迭代函数系统(Iterated Function System).

设 $w_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 是压缩映射集, 如果 $E = \bigcup_{i=1}^n w_i(E)$ , 则称 $D$ 的子集 $E$ 对压缩映射集

$\{w_i | i=1, 2, \dots, n\}$  是不变的。

### 1.2 压缩映射定理

设  $W = \{w_i | i=1, 2, \dots, n\}$  是  $D \subset R^m$  上的压缩映射集, 则存在一个唯一非空紧子集  $E$ , 它对  $W$  是不变的, 即

$$W(E) = E \quad \text{或者} \quad \sum_{i=1}^n w_i(E) = E$$

并且从  $D$  中的任意图象开始, 均可通过  $W$  反复迭代得到“不动点”图象  $E$ , 即

$$E = \lim_{k \rightarrow \infty} w_k(P)$$

其中,  $P$  可以是  $D$  中选出的任意一幅图象。

关于压缩映射定理的证明, 可参阅文献[5]。

### 1.3 上、下导数的定义

为了叙述方便, 不仿仅对二维平面上的长度为  $2^n$  的正方形图象加以定义。否则, 只要用边长为  $2^n$  的正方形把图象包围, 并把图象外、正方形内的图象灰度定义为 0 即可。

设  $D$  是  $R^2$  中的有界闭集, 其中任意一点  $(x, y)$  的灰度值  $z$  定义为

$$z = f(x, y) \tag{3}$$

为了定义图象  $D$  的下导数, 引进如下记号

$$L_0 = [l_{ij}] \tag{4}$$

其中,  $l_{ij} = \inf_{(x,y) \in D_{ij}} f(x, y), (x, y) \in D, i, j = 1, 2, \dots, 2^n$

$$L_1 = [l_{ij}] \tag{5}$$

其中(见图 1, 将图象  $D$  均匀分为 4 等分, 分别为  $D_{11}, D_{12}, D_{13}, D_{14}$ ),

$$l_{ij} = \begin{cases} \inf_{(x,y) \in D_{11}} f(x, y), & \text{当 } i, j = 1, 2, \dots, 2^{n-1} \text{ 时} \\ \inf_{(x,y) \in D_{12}} f(x, y), & \text{当 } i = 2^{n-1} + 1, 2^{n-1} + 2, \dots, 2^n \text{ 和} \\ & j = 1, 2, \dots, 2^{n-1} \text{ 时} \\ \inf_{(x,y) \in D_{13}} f(x, y), & \text{当 } i = 1, 2, \dots, 2^{n-1} \text{ 和} \\ & j = 2^{n-1} + 1, 2^{n-1} + 2, \dots, 2^n \text{ 时} \\ \inf_{(x,y) \in D_{14}} f(x, y), & \text{当 } i, j = 2^{n-1} + 1, 2^{n-1} + 2, \dots, 2^n \text{ 时} \end{cases}$$

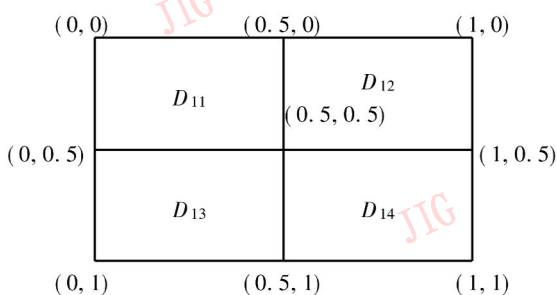


图 1 均匀剖分图象  $D$

$$L_m = [l_{ij}] \tag{6}$$

其中(见图 2, 图象  $D$  均匀分为  $2^{2m}$  等分)

$$v = 2^m, p = r + 1 - v, q = p + 1, r = 2^{2m}.$$

$$l_{ij} = \begin{cases} \inf_{(x,y) \in D_{m1}} f(x, y), & \text{当 } i, j = 1, 2, \dots, 2^{n-m} \text{ 时} \\ \inf_{(x,y) \in D_{m2}} f(x, y), & \text{当 } i = 2^{n-m} + 1, \dots, 2^{n-m+1} \text{ 和} \\ & j = 1, 2, \dots, 2^{n-m} \text{ 时} \\ \dots \\ \inf_{(x,y) \in D_{mv}} f(x, y), & \text{当 } i = 2^n - 2^m + 1, \dots, 2^n \text{ 和} \\ & j = 1, 2, \dots, 2^{n-m} \text{ 时} \\ \dots \\ \inf_{(x,y) \in D_{mp}} f(x, y), & \text{当 } i = 1, 2, \dots, 2^{n-m} \text{ 和} \\ & j = 2^n - 2^m + 1, \dots, 2^n \text{ 时} \\ \inf_{(x,y) \in D_{mq}} f(x, y), & \text{当 } i = 2^{n-m} + 1, \dots, 2^{n-m+1} \text{ 和} \\ & j = 2^n - 2^m + 1, \dots, 2^n \text{ 时} \\ \dots \\ \inf_{(x,y) \in D_{mr}} f(x, y), & \text{当 } i, j = 2^n - 2^m + 1, \dots, 2^n \text{ 时} \end{cases}$$

$D_{m1}$	$D_{m2}$	$\dots$	$D_{mv}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$D_{mp}$	$D_{mq}$	$\dots$	$D_{mr}$

图 2 均匀剖分图象  $D$

在定义了上述  $L_0, L_1, \dots, L_m$  符号之后, 则图象  $D$  的零阶下导数定义为

$$D^{(0)} = L_0 \tag{7}$$

一般在定义了  $D$  图象的  $(m-1)$  阶下导数后, 则图象  $D$  的  $m$  阶下导数定义为

$$D^{(m)} = (m!) \times (L_m - L_{m-1}) \tag{8}$$

为了定义图象  $D$  的上导数, 引进如下记号

$$H_0 = [h_{ij}] \tag{9}$$

其中,  $h_{ij} = \sup_{(x,y) \in D_{ij}} f(x, y), (x, y) \in D, i, j = 1, 2, \dots, 2^n$

$$H_1 = [h_{ij}] \tag{10}$$

其中(见图 1)

$$h_{ij} = \begin{cases} \sup_{(x,y) \in D_{11}} f(x, y), & \text{当 } i, j = 1, 2, \dots, 2^{n-1} \text{ 时} \\ \sup_{(x,y) \in D_{12}} f(x, y), & \text{当 } i = 2^{n-1} + 1, 2^{n-1} + 2, \dots, 2^n \text{ 和} \\ & j = 1, 2, \dots, 2^{n-1} \text{ 时} \\ \sup_{(x,y) \in D_{13}} f(x, y), & \text{当 } i = 1, 2, \dots, 2^{n-1} \text{ 和} \\ & j = 2^{n-1} + 1, 2^{n-1} + 2, \dots, 2^n \text{ 时} \\ \sup_{(x,y) \in D_{14}} f(x, y), & \text{当 } i, j = 2^{n-1} + 1, 2^{n-1} + 2, \dots, 2^n \text{ 时} \end{cases}$$

$$H_m = [h_{ij}] \quad (11)$$

其中(见图2)

$$h_{ij} = \begin{cases} \sup_{(x,y) \in D_{m1}} f(x,y), & \text{当 } i, j = 1, 2, \dots, 2^{n-m} \text{ 时} \\ \sup_{(x,y) \in D_{m2}} f(x,y), & \text{当 } i = 2^{n-m} + 1, \dots, 2^{n-m+1} \text{ 和} \\ & j = 1, 2, \dots, 2^{n-m} \text{ 时} \\ \dots\dots \\ \sup_{(x,y) \in D_{mv}} f(x,y), & \text{当 } i = 2^{n-2^m} + 1, \dots, 2^n \text{ 和} \\ & j = 1, 2, \dots, 2^{n-m} \text{ 时} \\ \dots\dots \\ \sup_{(x,y) \in D_{mp}} f(x,y), & \text{当 } i = 1, 2, \dots, 2^{n-m} \text{ 和} \\ & j = 2^{n-2^m} + 1, \dots, 2^n \text{ 时} \\ \sup_{(x,y) \in D_{mq}} f(x,y), & \text{当 } i = 2^{n-m} + 1, \dots, 2^{n-m+1} \text{ 和} \\ & j = 2^{n-2^m} + 1, \dots, 2^n \text{ 时} \\ \dots\dots \\ \sup_{(x,y) \in D_{mr}} f(x,y), & \text{当 } i, j = 2^{n-2^m} + 1, \dots, 2^n \text{ 时} \end{cases}$$

在定义了上述  $H_0, H_1, \dots, H_m$  符号之后, 则图象  $D$  的零阶上导数定义为

$$D^{(0)} = H_0 \quad (12)$$

一般在定义了  $D$  图象的  $(m-1)$  阶上导数后, 则  $D$  图象的  $m$  阶上导数定义如下

$$D^{(m)} = (m!) \times (H_m - H_{m-1}) \quad (13)$$

### 1.4 图象之间距离的定义

任意包含  $M$  个点的灰度数字图象  $\mathcal{Q}$  可以看作是  $R^M$  (其中  $R$  表示实数集) 中的一个元素, 本文用  $\Omega = \{1, 2, \dots, M\}$  表示图象中的坐标点集, 在  $R^M$  中应考虑距离测度( $d$ ).

$$d(\mathcal{Q}, \mathcal{Q}) = \sum_{j=1}^M |\mathcal{Q}(j) - \mathcal{Q}(j)|^2 \quad (14)$$

其中,  $\mathcal{Q}, \mathcal{Q} \in R^M$

### 1.5 图象 $D$ 的展开级数及其收敛性

记

$$\max D = D^{(0)} + D^{(1)} \times \frac{t}{1!} + D^{(2)} \times \frac{t^2}{2!} + \dots + D^{(k)} \times \frac{t^k}{k!}$$

$$\min D = \underline{D}^{(0)} + \underline{D}^{(1)} \times \frac{t}{1!} + \underline{D}^{(2)} \times \frac{t^2}{2!} + \dots + \underline{D}^{(k)} \times \frac{t^k}{k!}$$

其中  $t$  是  $(0, 1]$  单位区间上的变量.

可以严格地用数学方法证明, 在式(14)定义的距离下,  $\max D$  和  $\min D$  都是关于参数  $t$  一致收敛的矩阵级数, 并且在  $t=1$  点, 收敛到图象  $D$ .

**定理1** 假设图象  $D$  的最大灰度值是有界的, 则矩阵级数  $\max D(\min D)$  在  $(0, 1)$  单位区间上是一致收敛的, 并且  $\max D(\min D)$  收敛的矩阵级数

$D(D)$  还是连续的.

证明 对于固定的  $\delta \in (0, 1)$  和  $t \in (0, 1-\delta)$ , 由于

$$\sum_{i=q}^p t^i < t^q / (1-t) < (1-\delta)^q / \delta$$

因此, 只要  $q$  充分大, 上式就可以任意小. 另一方面, 根据图象  $D$  的最大灰度值是有界的假设, 即可知道  $D^{(i)}/i!$  ( $\underline{D}^{(i)}/i!$ ) 都是有界矩阵. 由此, 就证明了  $\max D$  和  $\min D$  在  $(0, 1-\delta)$  区间上都是一致收敛的矩阵级数, 并且其收敛的矩阵级数  $D(D)$  还是连续的, 再由  $\delta$  的任意性, 就得出定理1的结论是成立的.

若把  $D$  均匀地分为  $2^{2k}$  等分(就象图1和图2的分法一样), 那么, 对于其中的每一个区域, 由于区域变得越来越小, 因而, 在其上的最大与最小灰度值的差就越来越小. 特别, 当  $k \rightarrow \infty$  时, 其最大与最小灰度值的差就趋向于0.

**定理2** 假设图象  $D$  的最大灰度值是有界的, 并且当区域足够小时, 其上的灰度值是常数, 则图象  $D$  可以在单位1左侧附近展开成收敛的矩阵级数.

证明 实际上, 只要证明  $\max D$  和  $\min D$  在  $t=1$  时, 收敛到  $D$  即可. 而根据上下导数的定义和当区域足够小时, 其上的灰度值是常数的条件, 易知

$$\lim_k \max D = \lim_k \min D = D$$

另外, 当  $k$  充分大时,  $D$  和  $\min D$  (同理可对  $\max D$  证明) 之间的距离满足

$$|D - \min D| < (1-t) \left| \sum_{i=1}^k |D^{(i)}/i!| \sum_{j=0}^i t^j \right|$$

而根据区域被剖分足够小时, 其上的灰度值是常数的条件, 则可以得出

$$\left| \sum_{i=1}^k |D^{(i)}/i!| \sum_{j=0}^i t^j \right|$$

是有上界的, 因此, 当  $t$  趋向1时, 有下式成立

$$\lim_{t \rightarrow 1} \lim_k \min D = D$$

### 1.6 $\max D$ 和 $\min D$ 级数表示成压缩映射的“不动点”集

**定理3** 对于  $t \in [0, 1]$ ,  $\max D(\min D)$  级数可以表示成压缩映射的“不动点”集.

证明 仅对  $\max D$  级数采用数学归纳法进行论证(同理可对  $\min D$  级数进行证明). 为了叙述方便并不失一般性, 仅设  $D$  图象区间的长度为1, 否则, 只要乘一个比例常数就可以.

当  $k=1$  时, 级数仅有两项, 参考图1, 把  $D$  均匀分成4等分(分别为  $D_{11}, D_{12}, D_{13}, D_{14}$ ).

设  $D_{li}(i=1, 2, 3, 4)$  的灰度值为  $g_i$ , 其中  $g_i$  是  $t$  的函数, 则  $D_{li}$  与整个  $D$  是相似的. 压缩映射可以构造如下, 其中与  $D_{li}$  对应的压缩映射为  $w_{li}(i=1, 2, 3, 4)$ .

$$\begin{aligned}
 w_{11}(x, y, z) &= (0.5x, 0.5y, 0.5z + g_1 - 0.5g_j) && \text{当 } (x, y) \in D_{lj}, j = 1, \dots, 4 \text{ 时} \\
 w_{12}(x, y, z) &= (0.5x + 0.5, 0.5y, 0.5z + g_2 - 0.5g_j) && \text{当 } (x, y) \in D_{lj}, j = 1, \dots, 4 \text{ 时} \\
 w_{13}(x, y, z) &= (0.5x, 0.5y + 0.5, 0.5z + g_3 - 0.5g_j) && \text{当 } (x, y) \in D_{lj}, j = 1, \dots, 4 \text{ 时} \\
 w_{14}(x, y, z) &= (0.5x + 0.5, 0.5y, 0.5z + g_4 - 0.5g_j) && \text{当 } (x, y) \in D_{lj}, j = 1, \dots, 4 \text{ 时}
 \end{aligned}$$

由  $w_{11}$ 、 $w_{12}$ 、 $w_{13}$  和  $w_{14}$  的构造知道,  $k=1$  时, 结论是成立的.

假设在  $k-1$  时, 结论是成立的, 下面证明在  $k$  时结论也是成立的(参考图 2), 若把  $D$  均匀分成  $2^{2k}$  等分, 设  $D_{ki}(i=1, 2, \dots, 2^{2k})$  的灰度值为  $g_i$ , 则构造的  $2^{2k}$  个压缩映射如下:

$$\begin{aligned}
 w_{k1}(x, y, z) &= \begin{cases} (0.5x, 0.5y, 0.5z + g_1 - 0.5g_j) & \text{当 } (x, y) \in D_{kj}, j = 1, \dots, 4 \text{ 时} \\ (0, 0, 0) & \text{当 } (x, y) \in \text{其它时} \end{cases} \\
 w_{k2}(x, y, z) &= \begin{cases} (0.5x, 0.5y, 0.5z + g_2 - 0.5g_j) & \text{当 } (x, y) \in D_{kj}, j = 1, \dots, 4 \text{ 时} \\ (0, 0, 0) & \text{当 } (x, y) \in \text{其它时} \end{cases} \\
 w_{kp}(x, y, z) &= \begin{cases} (0.5x, 0.5y + 0.5, 0.5z + g_p - 0.5g_j) & \text{当 } (x, y) \in D_{kj}, j = 1, \dots, 4 \text{ 时} \\ (0, 0, 0) & \text{当 } (x, y) \in \text{其它时} \end{cases} \\
 w_{kq}(x, y, z) &= \begin{cases} (0.5x + 0.5, 0.5y, 0.5z + g_q - 0.5g_j) & \text{当 } (x, y) \in D_{kj}, j = 1, \dots, 4 \text{ 时} \\ (0, 0, 0) & \text{当 } (x, y) \in \text{其它时} \end{cases}
 \end{aligned}$$

其中,  $p=2^k+1, q=p+1, j=1, 2, p, q$ .  $w_{k1}$ 、 $w_{k2}$ 、 $w_{kp}$  和  $w_{kq}$  是分别对应于  $D_{k1}$ 、 $D_{k2}$ 、 $D_{kp}$  和  $D_{kq}$  上的压缩映射. 而对于其它的  $D_{ki}(i \neq 1, 2, p \text{ 和 } q)$ , 设  $D_{ki}$  区间左上角坐标为  $(x_i, y_i)$ , 则构造其上的压缩映射如下

$$w_{ki}(x, y, z) = \begin{cases} (0.5x + x_i, 0.5y + y_i, 0.5z + g_i - 0.5g_j) & \text{当 } (x, y) \in D_{kj}, j = 1, 2, p, q \text{ 时} \\ (0, 0, 0) & \text{当 } (x, y) \in \text{其它时} \end{cases}$$

即当其为  $k$  时, 命题也成立.

再由归纳法原理就可知道, 对任意的自然数  $k$ , 命题都是成立的, 定理 3 证毕.

由定理 2 和定理 3 的结论可得到定理 4 的结果.

**定理 4** 设  $D$  是  $R^m$  中的非空紧子集, 任给  $\epsilon > 0$ , 则存在以  $E$  为不变集的相似压缩映射集  $\{w_i | i=1, 2, \dots, m\}$ , 使  $d(D, E) < \epsilon$ .

当然, 这里的  $E$  是随  $\epsilon$  的变化而变化的. 该定理的理论意义也是十分清楚的, 它为人们寻找一组压缩映射(并使该组压缩映射的迭代不变集与要编码图象之间的距离小于  $\epsilon$ )的存在性提供了理论基础.

### 1.7 分级预处理

如果把定理 3 和定理 4 的结论直接应用于图象编码, 虽然编码速度非常快, 但是压缩比并不十分理想. 为了解决这个问题, 本文既应用定理 3 和定理 4 的结论, 也把分形编码的优点应用于编码, 即将匹配范围适当加大. 因此, 文章按以下方法对小块图象(或称矩阵)进行分级.

- (1) 每一小块图象灰度最大值与最小值的差.
  - (2) 每一小块图象的最大值与该块平均值的差.
  - (3) 每一小块图象的平均值与该块最小值的差.
- 根据上述分级方法, 可以得出如下的结论:

**定理 5** 对于给定的  $\delta > 0$ , 两个级数相差较大的图象块 **A** 和 **B**(或称矩阵)不能在误差失真  $\delta$  水平下相匹配.

证明 记 **A** 和 **B** 分别是如下两个矩阵块(其中 **A** 是某 Domain 矩阵乘以压缩因子  $s$  的结果, 而 **B** 是 Range 矩阵)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

并记

$$\begin{aligned}
 \max A &= \max \{a_{ij}\}, i, j = 1, \dots, n \\
 \min A &= \min \{a_{ij}\}, i, j = 1, \dots, n \\
 \max B &= \max \{b_{ij}\}, i, j = 1, \dots, n \\
 \min B &= \min \{b_{ij}\}, i, j = 1, \dots, n \\
 \text{Aver} A &= \left| \sum_{i,j=1, \dots, n} a_{ij} \right| / (n \times n) \\
 \text{Aver} B &= \left| \sum_{i,j=1, \dots, n} b_{ij} \right| / (n \times n)
 \end{aligned}$$

这里采用反证法来证明.

假设 **A** 和 **B** 分别是相差较远的两个级中的矩阵(或称小块图象), 并且在误差小于或等于  $\delta$  水平下相匹配, 即

$$\sum_{i,j=1,\dots,n} (a_{ij} - b_{ij} - (AverA - AverB))^2 < \delta \quad (15)$$

另一方面,在  $\delta$  比较小和  $A$  与  $B$  所在的级数相差较远的情况下,可以假设

$$(\max A - \min A) - (\max B - \min B) > \delta \quad (16)$$

由式(15)和式(16)式得出

$$\begin{aligned} \delta < & |(\max A - \min A) - (\max B - \min B)| < \\ & |(\max A - \min A) - (b_{kl} - b_{pq})| = \\ & |(\max A - b_{kl} - (AverA - AverB)) - \\ & (\min A - b_{pq} - (AverA - AverB))| < \\ & |\max A - b_{kl} - (AverA - AverB)| + \\ & |\min A - b_{pq} - (AverA - AverB)| < \end{aligned}$$

$$\sum_{i,j=1,\dots,n} (a_{ij} - b_{ij} - (AverA - AverB))^2 < \delta$$

因而与假设矛盾!

由此,就完成了整个定理的证明.这里需要详细解释的是  $b_{kl}$  和  $b_{pq}$ , 与  $b_{kl}$  对应的  $a_{kl}$  为  $\max A$ , 而与  $b_{pq}$  对应的  $a_{pq}$  为  $\min A$ .

定理的意义是十分重要的,它是分级预处理的基础.需要多解释几句的是小块图象的分级,虽然可以用最大值与最小值的差作为分级的主要标准,但是,由于实际情况比较复杂,因此,当矩阵  $A$  与其对应的级不能较好地匹配时,则下一个搜索目标就是“最大值与该块平均值的差”,或者是“平均值与该块最小值的差”所对应的级.

### 2 图象编码的具体实现

实现的步骤如下:

(1) 把整个  $D$  图象划分为  $N$  个互不相交的子块  $R^i (i= 1, 2, \dots, N)$ , 然后对每一子块  $R^i$  进行分级预处理,以决定把该块划分到哪一级中.

(2) 对每一小块图象进行分形编码,搜索匹配范围(按照预处理指定的级中进行).

(3) 对匹配不能满足要求的块可以进行细分处理,然后对细分处理后的块进行重新匹配,直至得到满足要求的匹配为止.

(4) 如果每一小块图象的分形编码都已完成,则结束.否则,返回到步骤(2).

### 3 实验结果

本文的实验对象是 MISS AMBER, 它是一幅

灰度图象(图4),分辨率是每帧  $320 \times 200$  象素,灰度分辨率为 8bit 灰度级,不同方法的处理结果由图4~6给出,其中图4是原始图象;图5是用经典方法把图象分成  $8 \times 8, 4 \times 4, 2 \times 2$  和  $1 \times 1$  压缩后恢复的图象;图6是用本文提出的方法把图象分成  $8 \times 8, 4 \times 4, 2 \times 2$  和  $1 \times 1$  压缩后恢复的图象.此外,本文还在表1中给出不同处理方法的压缩时间、压缩比和峰值信噪比  $PSNR$  (本文实验使用的是主频率 33 的 PC486DX2 计算机,用 C 语言编程实现),其中  $PSNR$  按下式计算:

$$PSNR = 10 \times \log_{10}(255 \times 255 \times X \times Y / DIS) \quad (17)$$

这里,  $DIS$  代表原始图象与恢复图象之间的距离,见式(14)所给的定义,而  $X$  和  $Y$  则分别代表图象的长度和高度.

表1 两种方法编码结果

块的大小	压缩比	PSNR	搜索范围	采用方法	编码时间 (min)
$8 \times 8, 4 \times 4, 2 \times 2, 1 \times 1$	13.12	26.80	整个图象	经典方法	1 124
$8 \times 8, 4 \times 4, 2 \times 2, 1 \times 1$	18.20	26.20	分级确定范围	本文方法	15.8



图4 原始图象



图5 (经典方法)恢复图象



图 6 (本文方法)恢复图象

## 4 结 论

本文针对图象分形编码时间太长这一严重缺点, 提出对编码图象构造压缩映射, 并在此基础上适当增大匹配范围来进行分级预处理, 则较好地解决了分形编码搜索范围太大的问题, 从而使得分形编码的压缩时间极大地减少; 实验表明, 通过进行分形压缩映射构造和分级预处理来解决分形编码搜索范围是可行的和有效的。

## 参 考 文 献

- 1 Barnsley M F, Sloan A D. A better way to compress images. BYTE Magazine, 1988, 13(1): 215~ 223.
- 2 Benoit B Mandelbrot. The fractal geometry of nature. New York: W. H. Freeman and Company, 1983.
- 3 Jacquin A E. A fractal theory of iterated Markov operators with applications to digital image coding [ Ph D dissertation ]. Department of Mathematics, Georgia Institute of Technology, 1989.

- 4 Jacquin A E. Image coding based on a fractal theory of iterated contractive image transformations. IEEE Transactions on Image Processing, 1992, 1(1): 18~ 30.
- 5 分形几何——数学基础及其应用. 曾文曲, 刘世耀译. 沈阳: 东北大学出版社, 1991, 180~ 185.
- 6 房育栋, 余英林. 快速分形图象压缩编码. 电子学报, 1996, 24(1): 28~ 33.
- 7 王舟, 余英林. 图象的部分分形映射压缩算法. 计算机研究与发展, 1998, 35(3): 199~ 204.
- 8 苏志强, 潘云鹤. 基于 IFS 块的快速图象编码方法. 计算机研究与发展, 1998, 35(3): 270~ 273.
- 9 Jacquin A E. Fractal image coding: A review. Proc of the IEEE. 1993, 81(10): 1451~ 1465.
- 10 微积分学教程(第二版). 北京大学高等数学教研室译. 北京: 人民教育出版社, 1979, 378~ 392.



**赵德平** 现任沈阳建筑工程学院计算机系副教授. 毕业于南开大学数学专业, 获学士学位, 毕业浙江大学计算机图形学专业, 获硕士学位. 1997 年入东北大学计算机系攻读博士学位. 主要研究方向为 CAD、计算机图形、图象处理和图象编码. 已发表论文 10 余篇.



**朱伟勇** 教授, 博士生导师, 东北大学计算机系从事教研工作, 主要研究方向为混沌分形、最优设计和计算机证明与构造.